SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE

MATEMATIČKE METODE U KEMIJSKOM INŽENJERSTVU

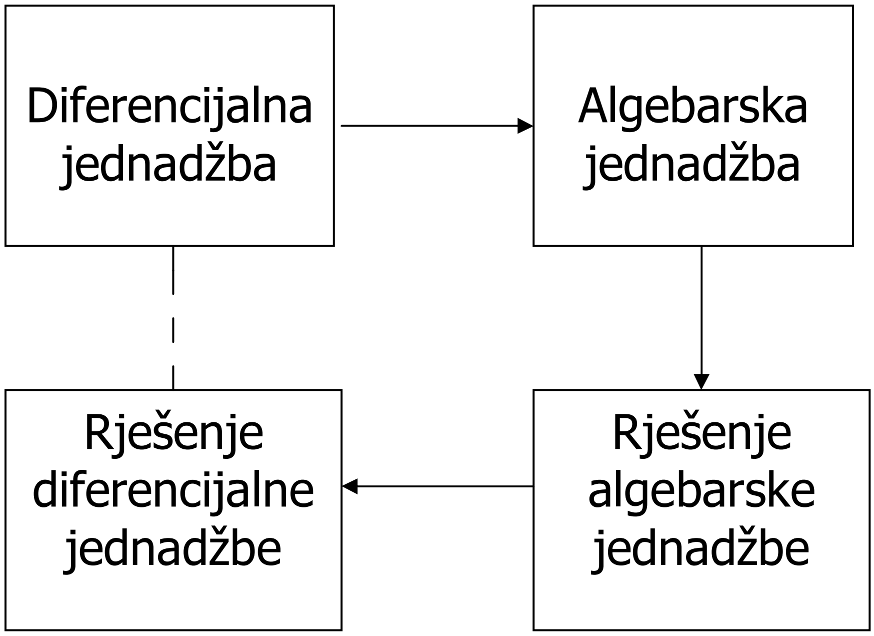
LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

Studenti : Nikolina Jakšić
Kornelije Kraguljac

1. Laplaceova transformacija

U matematici postoji više vrsta transformacija funkcija: Fourierova, Laplaceova, Poissonova, Mellinova ...

Zajedničko im je da se definiraju pomoću integrala pa se zovu i integralne transformacije, a nastale su iz dubokih matematičkih i praktičnih razloga. Uz druge važne primjene, Laplaceova transformacija ima i primjenu u rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi (skupa s početnim uvjetima – Cauchyev problem). Takva se primjena može se prikazati shematski:



Za razumijevanje Laplaceove transformacije potrebno je poznavati pojam nepravog integrala, pojam vektorskog prostora (u ovom slučaju to će biti vektorski prostor funkcija definiranih bar za sve pozitivne brojeve) i pojam linearnog operatora. Linearni operator je transformacija na vektorskim prostorima koja zbroj prebacuje u zbroj, razliku, i općenito, linearnu kombinaciju u linearnu kombinaciju.

Laplaceove transformacije rješavaju problem na način da diferencijalne jednadžbe prevode u algebarski problem. Jedna od prednosti je da rješava inicijalno stanje bez potrebe za prvom determinacijom općeg rješenja i onda i njega dobivanja parcijalnih rješenja. Dok kod rješavanja nehomogenih jednadžbi klasičnim metodama prvo moramo riješiti odgovarajuću homogenu jednadžbu, kod Laplaceove transformacije izravno dolazimo da rješenja nehomogenih jednadžbi.

1.1. Laplaceova transformacija.
Inverzna transformacija. Linearnost.

Neka je $f(t)$ dana funkcija koja je definirana za sve pozitivne vrijednosti od t. Množenjem funkcije $f(t)$ sa e^{-st} i integriranjem sa granicama od nula do beskonačnosti. Ako dobiveni integral postoji onda je to funkcija od s i pišemo $F(s)$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt .$$

Ta funkcija $F(s)$ zove se Laplaceova transforma od originalne funkcije $f(t)$, te ju zapisujemo kao $L(f)$.

$$L(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad .$$

Opisana operacija $f(t)$ naziva se Laplaceova transformacija.

Nadalje originalna funkcija $f(t)$ zove se inverzna transforma ili inverzija od $F(s)$ te ju zapisujemo $L^{-1}(F)$:

$$f(t) = L^{-1}(F) .$$

Primjer 1.

Neka je $f(t)$ = 1 kada je t > 0 tada

$$L(f) = L(1) = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty \quad ;$$

dakle, kad je $s > 0$,

$$L(1) = -\frac{1}{s} \quad .$$

Najvažnije svojstvo dano je u sljedećem teoremu.

Teorem 1 (Linearno svojstvo).

Laplaceova transformacija je linearna transformacija koja je za svaku funkciju $f(t)$ i $g(t)$ za koje postoji Laplaceova transforma i konstante a i b imamo

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aL(f) + bL(g)$$

Dokaz. Prema definiciji

$$L\{af(t) + bg(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[af(t) + bg(t)\right]dt$$

$$= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt = aL(f) + bL(g)$$

.

Neke elementarne funkcije $f(t)$ i njihove Laplaceove transformacije $L(f)$ dane su u tablici 1.

Tablici 1.

	$f(t)$ $f(t)$	$L(f)$		$f(t)$	$L(f)$
1	1	1/s	6	e^{at}	1/(s-a)
2	t	$1/s^2$	7	cos ωt	$s/(s^2+\omega^2)$
3	t^2	$2!/s^3$	8	sin ωt	$\omega/(s^2+\omega^2)$
4	t^n (n=1,2,.....)	$n!/s^{n+1}$	9	cosh at	$s/(s^2-a^2)$
5	t^a (a positive)	$(\Gamma(a+1))/(s^{a+1})$	10	sinat at	$a/(s^2-a^2)$

<u>Teorem 2. First shifting theorem.</u>

Ako je $L(f)=F(s)$ kada je $s>\alpha$, tada je

$$L\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a) \qquad (s>\alpha+a);$$

dakle, supstitucija s sa $s-a$ u odgovarajućem transformu i množenjem originalnom funkcijom sa e^{at}.

Dokaz. Prema definiciji,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

i , tada,

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} \left[e^{at} f(t) \right] dt = L\left\{ e^{at} f(t) \right\}.$$

Primjer 2.

Koristeći Teorem 2 na formulama 4, 7 i 8 u Tablici 1 dobivamo sljedeće rezultate.

$f(t)$	$L(f)$
$e^{at} t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$

Za funkciju $f(t)$ kažemo da je po dijelovima kontinuirana na konačnom intervalu $a \le t \le b$ $a \le t \le b$ ako je definirana za takav interval i za interval koji se može podijeliti na više konačnih intervala.

Teorem 3 (Postojeći teorem).

Neka $f(t)$ funkcija koja je po dijelovima kontinuirana za svaki konačni interval gdje je $t \geq 0$ i zadovoljava

$$|f(t)| \leq \mathrm{M}e^{\alpha t} \qquad \text{za } t \geq 0$$

i za neke konstanate α i M. Tada Laplaceova transforma od $f(t)$ postoji za sve $s > \alpha$.

Dokaz.

Budući da je $f(t)$ po dijelovima kontinuirana, $e^{-st}f(t)$ je itegrabilna za svaki konačni interval na t osi, i iz $|f(t)| \leq \mathrm{M}e^{\alpha t}$ slijedi

$$|L(f)| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \leq \int_0^\infty e^{-st} |f(t)|dt \leq \int_0^\infty e^{-st} Me^{\alpha t} dt = M\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{M}{s-\alpha} \qquad (s > \alpha).$$

U slučaju kada dvije funkcije imaju jednaku Laplaceovu transformu, one su potpuno identične.

1.2. Laplaceove transforme derivacije i integrala.

Sad ćemo vidjeti, grubo govoreći, difereciranje i integriranje funkcije $f(t)$ odgovara množenju i dijeljenju Laplaceove transforme $F(s)=L(f)$ sa s. Velika važnost ovog svojstva Laplaceove transformacije je očita, jer na taj način računske operacije mogu biti zamijenjene sa jednostavnim algebarskim operacijama. Mi počinjemo sa sljedećim teoremom.

Teorem 1 (Diferenciranje $f(t)$).

Pretpostavimo da je $f(t)$ kontinuirana za sve $t \geq 0$ i zadovoljava $|f(t)| \leq \mathrm{M}e^{\alpha t}$ za konstante α i M, i ima derivaciju $f'(t)$ koja je po dijelovima kontinuirana za svaki konači interval $t \geq 0$. Tada Laplaceova transforma derivacije $f'(t)$ postoji kad je $s > \alpha$, i

$$L(f') = sL(f) - f(0) \qquad (s > \alpha).$$

Dokaz.

Za slučaj kada je derivacija $f'(t)$ kontinuirana za sve $t \geq 0$, parcijalnim integriranjem slijedi

$$L(f') = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \ .$$

Uvrštavanjem $L(f') = sL(f) - f(0)$ u drugu derivaciju $f''(t)$ dobivamo

$$\begin{aligned} L(f'') &= sL(f') - f'(0) \\ &= s\left[sL(f) - f(0)\right] - f'(0) \\ &= s^2 L(f) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

Na sličan način dobivamo i treću derivaciju

$$L(f''') = s^3 L(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

i ostale.

<u>Teorem 2 (Derivacija za bilo koji n)</u>

Neka su funkcije $f(t)$ i njezine derivacije $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n-1)}(t)$ kontinuirane funkcije za sve $t \geq 0$, zadovoljavajući $|f(t)| \leq \mathrm{M}e^{\alpha t}$ za konstante α i M, i neka derivacija $f^{(n)}(t)$ koja je po dijelovima kontinuirana za svaki konači interval $t \geq 0$. Tada Laplaceova transforma od $f^{(n)}(t)$ postoji kada je $s > \alpha$, i dana je formulom

$$L(f^{(n)}) = s^n L(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Primjer 3.

Neka $f(t) = t^2/2.$ Nađimo $L(f)$. Mi imamo $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(t) = 1.$

Budući $L(1) = 1/s$, mi dobivamo iz $L(f'') = s^2 L(f) - sf(0) - f'(0)$

$$L(f'') = L(1) = \frac{1}{s} = s^2 L(f) \text{ ili } L(\frac{t^2}{2}) = \frac{1}{s^3}.$$

Primjer 4.

Neka je $f(t) = \cos\omega t$. Nađimo $L(f)$. Imamo $f(0) = 1$, i nadalje

$$f'(t) = -\omega \sin\omega t,\ f'(0) = 0,\ f''(t) = -\omega^2 \cos\omega t = -\omega^2 f(t).$$

Iz toga i $L(f'') = s^2 L(f) - sf(0) - f'(0)$ slijedi

$$-\omega^2 L(f) = L(f'') = s^2 L(f) - s \quad \text{ili} \quad L(f)(s^2 + \omega^2) = s.$$

I dobivamo očekivani rezultat

$$L(\cos\omega t) = \frac{s}{(s^2 + \omega^2)}.$$

Sad smo vidjeli da diferenciranje $f(t)$ odgovara množenju $L(f)$ sa s.

A sad ćemo pokazati da integriranje $f(t)$ odgovara dijeljenju $L(f)$ sa s.

<u>Teorem 3 (Integriranje $f(t)$).</u>

Ako je funkcija $f(t)$ po dijelovima kontinuirana i zadovoljava nejednakost $|f(t)| \le \mathrm{M}e^{\alpha t}$ za $t \ge 0$, tada je

$$L\left\{\int_0^\infty f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s} L\{f(t)\} \qquad (s>0, s>\alpha).$$

Dokaz.

Pretpostavimo da $f(t)$ je po dijelovima kontinuirana i zadovoljava $|f(t)| \leq \mathrm{M}e^{\alpha t}$ za $t \geq 0$ za konstante α i M. Ako pretpostavimo da je α pozitivan tada je integral

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

kontinuiran te dobivamo slijedeću relaciju

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau \leq M \int_0^t e^{\alpha\tau} d\tau = \frac{M}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) \qquad (\alpha > 0).$$

Nadalje, $g'(t) = f(t)$, izuzev slučajeva kada je $f(t)$ diskontinuirana.

Dakle $g'(t)$ je po dijelovima kontinuirana za svaki konačni interval te prema Teoremu 1 slijedi

$$L\{f(t)\} = L\{g'(t)\} = sL\{g(t)\} - g(0) \qquad (s > \alpha)$$

Dakle, $g(0) = 0$, i slijedi

$$L(g) = \frac{1}{s} L(f) \quad .$$

Primjer 5.

Neka je $L(f)=\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$. Nađi $f(t)$. Iz Tablice 1imamo

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{1}{\omega}\sin\omega t.$$

Iz toga i Teorema 3 slijedi da

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right\}=\frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau d\tau=\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t).$$

Koristeći Teorem 3 još jednom, dobivamo željeno rješenje

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right\}=\frac{1}{\omega^2}\int_0^t (1-\cos\omega\tau)d\tau=\frac{1}{\omega^2}\left(t-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right).$$

1.3. Transformacija obične diferencijalne jednadžbe

Sada ćemo vidjeti kako je obične linearne diferecijalne jednadžbe sa konstantnim koeficijentima mogu biti reducirene u algebarske jedmadžbe. Naprimjer, razmatramo jednadžbu

$$y''(t)+\omega^2 y(t)=r(t)$$

gdje su $r(t)$ i ω zadani. Primjenjujući Laplaceovu transformaciju i koristeći $L(f'')=s^2L(f)-sf(0)-f'(0)$, dobivamo

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+\omega^2Y(s)=R(s),$$

gdje je $Y(s)$ Laplaceova transformaacija od funkcije $y(t)$, i $R(s)$ je Laplaceova transformacija od $r(t)$. Ovakva algebarska jednadžba naziva se **pomoćna jednadžba** od dane diferencijalne jednadžbe. Ovo rješenje je jasno

$$Y(s)=\frac{sy(0)+y'(0)}{s^2+\omega^2}+\frac{R(s)}{s^2+\omega^2}.$$

Primjer 1.

Nađimo rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y''+9y=0,$$

zadovoljavajući početni uvjet $y(0)=0, y'(0)=2$.

Iz $s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+\omega^2Y(s)=R(s)$ sljedi da je pomoćna jednadžba

$$s^2Y(s)-2+9Y(s)=0.$$

Rješavanje po $Y(s)$, mi dobivamo

$$Y(s)=\frac{2}{s^2+9}=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{s^2+9}\right).$$

Iz toga i Tablice 1 dobivamo

$$y(t)=L^{-1}(Y)=\frac{2}{3}\sin 3t.$$

Prema supstituciji vidimo da ova funkcija zadovoljava zadanu jednadžbu i početne uvjete.

1.4. Diferenciranje i integriranje transformacija

Može se pokazati da ako funkcija $f(t)$ zadovoljava uvjete iz postojećeg teorema iz 1.1. poglavlja tada je derivacija odgovarajuće transforme

$$F(s) = L(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

s obzirom na s može biti prikazana diferenciranjem unutar integralnog znako obzirom na s; slijedi

$$F'(s) = -\int_0^\infty e^{-st}\left[tf(t)\right]dt$$

U slučaju kada je $L(f) = F(s)$; slijedi

$$L\{tf(t)\} = -F'(s);$$

diferenciranje transformirane funkcije odgovara množenju funkcije sa $-t$. Ovo svojstvo Laplaceove transformacije omogućava nam dobivanje novih transformacija od već postojećih.

Slično, ako $f(t)$ zadovoljava uvjete iz postojećeg teorema u 1.1. poglavlju i granice od $f(t)/t$ postoje , kako t ide prema 0, pa je

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_{s}^{\infty}F(\tilde{s})d\tilde{s} \qquad (s>a)\,;$$

te slijedi da integriranje transformirane funkcije $f(t)$ odgovara dijeljenju te funkcije sa t.

Iz definicije slijedi da

$$\int_{s}^{\infty}F(\tilde{s})d\tilde{s}=\int_{s}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty}e^{-\tilde{s}t}f(t)dt\right]d\tilde{s},$$

i može se pokazati da unutar pretpostavke redoslijed integriranja može biti obrnut, te je ,

$$\int_{s}^{\infty}F(\tilde{s})d\tilde{s}=\int_{s}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty}e^{-\tilde{s}t}f(t)d\tilde{s}dt\right]dt=\int_{s}^{\infty}f(t)\left[\int_{0}^{\infty}e^{-\tilde{s}t}d\tilde{s}\right]dt\,.$$

Integral po s s desne strane odgovara e^{-st}/t kada je $s>\alpha$ te slijedi

$$\int_{s}^{\infty}F(\tilde{s})d\tilde{s}=\int_{0}^{\infty}e^{-\tilde{s}t}\frac{f(t)}{t}dt=L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \qquad (s>\alpha).$$

Primjer 1.

Nađi inverznu funkciju od $\ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)$.

Diferenciranjem prvo dobivamo

$$-\frac{d}{ds}\ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)=\frac{2\omega^2}{s\left(s^2+\omega^2\right)}\equiv F(s)\,.$$

Zapisivajući $F(s)$ parcijalno, dobivamo

$$\rightarrow f(t)=L^{-1}(F)=L^{-1}\left\{\frac{2}{s}-2\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\}=2-2\cos\omega t\,.$$

Ova funkcija zadovoljava uvjete koje sadrži $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^{\infty}F(\tilde{s})d\tilde{s}$.

Te slijedi

$$L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)\right\}=\int_s^{\infty}F(\tilde{s})d\tilde{s}=\frac{f(t)}{t}\,.$$

Rezultat je

$$L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)\right\}=\frac{2}{t}(1-\cos\omega t)\,.$$

1.5. Periodične frunkcije

Neka je $f(t)$ funkcija koja je definirana za sve pozitivne t i ima period $p(>0)$, tada je ,

$$f(t+p)=f(t) \qquad \text{za sve } t>0.$$

Ako je funkcija $f(t)$ po dijelovima kontinuirana na intervalu p, tada Laplaceova transformacija postoji i možemo pisati integral u granicama od 0 do ∞ kao uzastopnu seriju integrala:

$$L(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^p e^{-st}fdt+\int_p^{2p} e^{-st}fdt+\int_{2p}^{3p} e^{-st}fdt+...$$

Ako supstituiramo $t=\tau+p$ u drugom integralu, $t=\tau+2p$ u trećem integralu, ..., $t=\tau+(n-1)p$ u n-tom integralu , ..., tada su nove granice od 0 do p. Tada

$$f(\tau+p)=f(\tau)\ , \qquad f(\tau+2p)=f(t),$$

itd., tada dobivamo

$$L(f)=\int_0^p e^{-s\tau}f(\tau)d\tau+\int_0^p e^{-s(\tau+p)}f(\tau)d\tau+\int_0^p e^{-s(\tau+2p)}f(\tau)d\tau+\dots.$$

Ako izvadimo faktore koji ne ovise o τ izvan integralnog znaka dobivamo

$$L(f)=\left[1+e^{-sp}+e^{-2sp}+...\right]\int_0^p e^{-s\tau}f(\tau)d\tau.$$

Uz uvjet da je $\left[1+e^{-sp}+e^{-2sp}+...\right]=1/(1-e^{-sp})$.

Teorem 1 (Transformacija periodičnih funkcija).

Laplaceova transformacija po dijelovim kontinuirana periodične funkcije $f(t)$ sa periodom p

$$L(f)=\frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)dt \qquad (s>0).$$